



ce
pre
UNI

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

Álgebra

Adjunta de una matriz
Matrices Semejantes



MATRIZ ADJUNTA

Definición:

Sea una matriz $A \in K^{n \times n}$, se define la matriz adjunta de A como la transpuesta de su matriz de cofactores.

$$\text{adj}(A) = (\text{Cof}(A))^T.$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Cof}(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

PROPIEDAD

Sea : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Su matriz adjunta es: $adj(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Ejemplo

Calcular la matriz adjunta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow adj(B) = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean A, B dos matrices del mismo orden n , se cumple:

1. $A \cdot adj(A) = |A|I_n$
2. $adj(I_n) = I_n$
3. $adj(kA) = k^{n-1}adj(A)$, k escalar
4. $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A$
5. $adj(A^T) = [adj(A)]^T$
6. $|adj(A)| = |A|^{n-1}$
7. $adj(AB) = adj(B) \cdot adj(A)$
8. $adj(A^m) = [adj(A)]^m$, $m \in \mathbb{N}$
9. $adj(A^{-1}) = (adj(A))^{-1}$, A es no singular

EJERCICIO

Sea A una matriz cuadrada de orden 2, pruebe que:

$$A \cdot adj(A) = |A| \cdot I_2$$

Demostración

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Su adjunta es :

$$adj(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Calculando la $|A|$:

$$|A| = ad - bc$$

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$A \cdot adj(A) = |A| \cdot I_2$$

Ejercicio

Sea A una matriz cuadrada de orden $n > 1$, pruebe que:

$$|adj(A)| = |A|^{n-1}, \quad |A| \neq 0$$

Demostración

Sabemos que : $A \cdot adj(A) = |A|I_n$

Tomando determinantes :

$$|A \cdot adj(A)| = ||A|I_n|$$

$$|A \cdot adj(A)| = |A|^n |I_n|$$

$$|A| \cdot |adj(A)| = |A|^n \rightarrow |adj(A)| = |A|^{n-1}$$

Ejercicio

Sea A una matriz cuadrada de orden n , determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si $|A| = -1$, entonces $|2adj(adj(A))| = -2^n$

II. Si $adj(A) = I_n$, entonces $A = I_n$

III. $\forall m \in \mathbb{N}, (adj(A^m))^T = (adj(A^T))^m$

IV. Si A y B son conmutables, entonces $adj(A)$ y $adj(B)$ son conmutables

Respuesta. FFVV

Ejercicio

Sean A y B matrices del mismo orden, determine el valor de verdad de la siguientes proposiciones:

- I. Si $\text{adj}(A) = A$, entonces el orden de la matriz A es 2×2 .
- II. Si $|A| \neq 0$, entonces $(\text{adj}(A^{-1}))^{-1} = \text{adj}(A)$
- III. $\text{adj}(\text{adj}(A)^n) = (\text{adj}(\text{adj}(A)))^n$

Respuesta. FVV

CALCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ USANDO LA ADJUNTA.

Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple lo siguiente:

$$A \cdot adj(A) = |A|I_n,$$

En particular, si $|A| \neq 0$ entonces se tiene.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Ejercicio

Determine la matriz inversa de A, si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución



Ejercicio

Determine A , si :

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Respuesta: $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 6 & 3 & -3 \\ 6 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercicio

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 , tal que $|A| = -1$
y la $Tr(A^{-1}) = 0$, además

$$adj(A) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ b & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule el valor de $a + b$.

Resolución

Respuesta. -4

PROPIEDADES

Sean A, B dos matrices del mismo orden n , se cumple:

1. Si A y B son matrices conmutables, entonces $\text{adj}(A)$ y $\text{adj}(B)$ son matrices conmutables.
2. Si A es una matriz simétrica, entonces $\text{adj}(A)$ es una matriz simétrica.
3. Si A es una matriz antisimétrica, entonces
 - a) $\text{adj}(A)$ es una matriz simétrica, si n es impar.
 - b) $\text{adj}(A)$ es una matriz antisimétrica, si n es par.

MATRICES SEMEJANTES

Definición:

Se dice que dos matrices A y B de orden n sobre K , son semejantes si existe una matriz invertible P , tal que $AP = PB$.

Ejemplo

Dada las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que las matrices A y B son semejantes.

Ejercicio

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Si P es una matriz que se obtiene de

A al sumar a la primera fila con el doble de la segunda fila, después intercambiar ambas filas, finalmente a la primera fila multiplicar por -1. Halle una matriz B, talque $B = PAP^{-1}$

Resolución

Respuesta. $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$

Ejercicio

La matriz $B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ es semejante a la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Halle una matriz $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, de coeficientes enteros tal que A y B sean semejantes.

Resolución

Respuesta. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

TEOREMA

Sean A y B dos matrices semejantes de orden $n \times n$, se cumple:

1. $B^m = P^{-1}A^mP, m \in \mathbb{N}$
2. $tr(A) = tr(B)$
3. $|A| = |B|$
4. $|\lambda I_n - A| = |\lambda I_n - B|, \lambda \in \mathbb{R}$



Ejercicio

Dadas las matrices A y D semejantes. Calcule la *traza*(A^5)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución



Ejercicio

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, halle una matriz columna no nulo $v \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$

tal que $Av = \lambda v$, $\lambda > 0$

Solución

Respuesta. $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio

Dada la matriz A , tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que

$$A^{2023}v = \alpha v, \text{ donde } v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Resolución

Respuesta. 2^{2023}

TEOREMA

Sean A y B dos matrices de orden $n \times n$. Si A y B son matrices semejantes entonces:

1. $\text{adj}(A)$ y $\text{adj}(B)$ son matrices semejantes.
2. A^m y B^m son matrices semejantes, donde $m \in \mathbb{N}$.
3. $I_n - A$ y $I_n - B$ son matrices semejantes.